Il est demandé aux candidats de souligner les résultats obtenus. La précision, la concision, la rédaction et la présentation des démonstrations seront des éléments essentiels d'appréciation. Aucun raisonnement incomplet ne sera pris en considération. Tout manque de rigueur sera sanctionné.

Dans tout le problème, R désigne le corps des nombres réels et N l'ensemble des entiers naturels. On note R^n, l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ à coordonnées réelles.

Pour x et y dans R^n, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique de x et de y, c'est-à-dire que l'on a $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. De même, $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x, c'est-à-dire que l'on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

On note $\mathcal{M}_n(R)$, l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients réels.

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(R)$ est dite bistochastique si, pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on a $a_{i,j} \geq 0$, $\sum_{h=1}^n a_{i,h} = \sum_{h=1}^n a_{h,j} = 1$.

On note $\mathcal{B}_n$, l'ensemble des matrices bistochastiques de dimension n.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(R)$ est dite de permutation si elle est bistochastique et si tous ses coefficients sont égaux à zéro ou un.

Pour tout couple de réels (i,j), on note $\delta_{i,j}$ la quantité égale à 1 si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs, on note e le vecteur de R^n dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie IV des parties II et III.

I Préliminaires

1) Montrer que si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de permutation de $\mathcal{M}_n(R)$, alors il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ on a $a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$.

2) Montrer que si A est une matrice de permutation alors A a un déterminant égal à 1 ou à -1. Déterminer l'inverse de A.

3) Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques est une matrice bistochastique.

4) Montrer que si A est une matrice bistochastique et a un vecteur ligne de A alors $\|a\| \leq 1$ et que l'égalité n'est obtenue que si a est un vecteur de la base canonique de R^n.

5) En déduire que les seules matrices bistochastiques d'inverse bistochastique sont les matrices de permutation.

II Polyèdres convexes

Un demi-espace de R^n est un sous-ensemble H pour lequel il existe $x \in R^n$ et $\alpha \in R$ tels que $H = \{y \in R^n : x \cdot y \leq \alpha\}$.

Pour m entier, soit $\mathcal{S}_m = \{\lambda \in R^m : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$. On rappelle que $K \subset R^n$ est dit convexe si pour tout m, tout $\lambda \in \mathcal{S}_m$ et toute famille $(x^i)_{i=1,\ldots,m}$ d'éléments de K on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in K$. Par ailleurs, si L est un sous-ensemble de R^n, on appelle enveloppe convexe notée $co(L)$, l'intersection de tous les ensembles convexes contenant L et on a $co(L) = \{x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i : m \in N, (x^i) \in L^m \text{ et } \lambda \in \mathcal{S}_m\}$.

On dit qu'un sous-ensemble K de R^n est un polyèdre convexe si K est borné et si K est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.

On appelle dimension d'un polyèdre convexe la dimension de l'espace affine qu'il engendre.

On dit que x est un sommet du polyèdre convexe K si $x \in K$ et si pour tout couple (y, z) d'éléments de K et tout $\lambda \in]0, 1[$, $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ entraîne $y = z = x$.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un polyèdre convexe de R^n. Déterminer sa dimension et ses sommets.

2) Soit K un polyèdre convexe de R^n et soit H un hyperplan de R^n avec $H = \{y \in R^n :$

$x \cdot y = \alpha\}$ où x est donné dans R^n et α dans R. On suppose que $H \cap K \neq \emptyset$ et que $K \cap \{y \in R^n : x \cdot y > \alpha\} = \emptyset$. Un tel H est appelé hyperplan d'appui de K. Montrer que l'ensemble des sommets de $H \cap K$ est égal à l'ensemble des sommets de K intersecté avec H.

3) Soit k un point de la frontière de K, polyèdre convexe, montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de K contenant k.

4) Montrer que K, polyèdre convexe, est égal à l'enveloppe convexe de sa frontière.

5) En déduire, par récurrence sur n, que tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

III L'ensemble $\mathcal{B}_n$ des matrices bistochastiques de dimension n

1) Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un polyèdre convexe de dimension au plus $(n-1)^2$.

2) Montrer, par récurrence sur n, que l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}_n$ est égal à l'ensemble des matrices de permutation. (On pourra commencer par montrer que si $S = (s_{i,j})$ est un sommet de $\mathcal{B}_n$ alors il existe un couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$ tel que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ on a $s_{i,k} = \delta_{k,j}$ et $s_{k,j} = \delta_{i,k}$.)

3) Soit d un entier. Montrer que si $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ avec $(x, x^1, \ldots, x^m) \in (R^d)^{m+1}$ et $\lambda \in \mathcal{S}_m$, alors il existe $\mu \in \mathcal{S}_{d+1}$ et $(y^i)_{i=1,\ldots,d+1} \in (R^d)^{d+1}$ avec $\{y^1, \ldots, y^{d+1}\} \subset \{x^1, \ldots, x^m\}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i y^i$.

4) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{B}_n$ se décompose sous la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i A_i$ avec $\lambda \in \mathcal{S}_m$, $m \leq (n-1)^2 + 1$ et où les A_i sont des matrices de permutation.

IV Orbite d'un vecteur x de R^n

1) Soit $x \in R^n$ et deux entiers i et j de $\{1,\ldots,n\}$ tels que $x_1 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_j \leq \ldots x_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $y \in R^n$ tels que $y_i = x_i + \varepsilon \leq x_j$, $y_j = x_j - \varepsilon \geq x_i$ et $y_k = x_k$ pour tout k différent de i et de j. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon^{i,j} \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = A_\varepsilon^{i,j} x$.

2) On rappelle qu'une fonction φ de R dans R est dite convexe si pour tout entier m, tout t dans R^m et tout λ dans $\mathcal{S}_m$ on a $\varphi(\sum_{i=1}^m \lambda_i t_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(t_i)$. Soient x et y dans R^n et $A \in \mathcal{B}_n$ tels que $y = Ax$, montrer que pour toute fonction convexe φ on a $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \varphi(y_i)$.

3) Supposons, à présent, que x et y sont deux vecteurs de R^n tels que $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et $y_1 \leq \ldots \leq y_n$ et tels que pour toute fonction convexe φ on a $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \varphi(y_i)$. Montrer que l'on a alors, pour tout $k < n$, $x_1 + \ldots + x_k \leq y_1 + \ldots + y_k$ et $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$. Lorsque deux vecteurs x et y vérifient ces dernières relations on dit que y domine x.

4) Soient x et y deux vecteurs de R^n tels que $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et $y_1 \leq \ldots \leq y_n$. L'objet de cette question est de démontrer, par récurrence sur n, la propriété (P) suivante :

(P) Si y domine x alors il existe $A \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = Ax$.

On notera $a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

a) Vérifier la propriété (P) pour $n = 1$ ainsi que dans le cas général si $x_1 = a$ ou $x_n = a$.

b) On suppose, à présent, que $x_1 < a < x_n$ et que la propriété (P) est démontrée pour tout entier strictement plus petit que n. Montrer que s'il existe $k < n$ tel que $x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k$ alors il existe $A_k \in \mathcal{B}_k$ et $A_{n-k} \in \mathcal{B}_{n-k}$ tels que $y^{(k)} = A_k x^{(k)}$ et $y^{(n-k)} = A_{n-k} x^{(n-k)}$ où $x^{(k)}$ désigne le vecteur $(x_1, \ldots, x_k)$ et $x^{(n-k)}$ le vecteur $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (idem pour y). Conclure dans ce cas.

c) On suppose à présent que toutes les inégalités sont strictes (c'est à dire que $x_1 + \ldots + x_k < y_1 + \ldots + y_k$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $x_1 < a < x_n$). Soit i l'indice de la plus grande coordonnée de x inférieure strictement à a et j l'indice de la plus petite coordonnée de x strictement supérieure à a. Soit $\bar{\varepsilon}$ le plus grand réel tel que $A_{\bar{\varepsilon}}^{i,j} x$ est dominé par y. Montrer que la propriété (P) est vraie si $\bar{\varepsilon} \leq min\{(a - x_i), (x_j - a)\}$ (on remarquera que, dans ce cas, $A_{\bar{\varepsilon}}^{i,j} x$ sature au moins l'une des inégalités).

d) Dans le cas contraire (c'est à dire si $\bar{\varepsilon} > min\{(a - x_i), (x_j - a)\}$), montrer qu'il suffit alors de vérifier la propriété (P) pour un vecteur x' bien choisi ayant strictement plus de coordonnées égales à a que x. Conclure.

5) On note $\mathcal{I}_k$ l'ensemble des sous ensembles I de $\{1, \ldots, n\}$ à k éléments. Soient x et y dans R^n. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = Ax$ est $min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum\limits_{i \in I} x_i \leq min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum\limits_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.

ENSAE 1996 (M') Math II - Corrigé - Matrices bistochastiques

Auteur du corrigé : Robert Cabane ©2006

Partie I : Préliminaires

1°) Matrices de permutation..
Avec des coefficients égaux à 0 ou 1, la somme de chaque ligne ou colonne ne pourra valoir 1 qui si exactement un coefficient égal à 1 apparaît dans chaque ligne et chaque colonne. Notons, pour une colonne j, le numéro de la ligne dans laquelle on trouve le coefficient non nul comme $\sigma(j)$. L'application σ est injective car si $\sigma(j) = \sigma(k) = i$ alors la ligne i possède deux coefficients égaux à 1, ce qui est absurde. L'ensemble des indices étant fini, σ est bien une permutation de cet ensemble et le coefficient général de la matrice s'écrit $\delta_{i\sigma(j)}$.

2°) Le déterminant de A est, par définition, égal à $\det A = \sum\limits_{s\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod\limits_{j=1}^{n} a_{s(j)j}$. Quand s coïncide avec σ, on a $\prod\limits_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} = 1$. Autrement, l'un au moins des $i = s(j)$ n'est pas égal à $\sigma(j)$, donc il y a un coefficient nul dans le produit.

$\boxed{\text{Le déterminant d'une matrice de permutation est égal à la signature de la permutation associée.}}$

Quant à l'inverse, elle est associée à l'inverse de σ, car l'application qui à σ associe $A = (\delta_{i\sigma(j)})$ est un morphisme de groupes multiplicatifs (cela se voit en écrivant l'endomorphisme de permutation associé à A). En fait, c'est aussi ${}^tA = (\delta_{\sigma(i)j})$ car dans le produit de l'une et de l'autre les seules "rencontres" possibles permettant un coefficient non nul seraient du type $\delta_{\sigma(i)j}\delta_{j\sigma(i)} = 1 \times 1 = 1$.

$\boxed{\text{L'inverse d'une matrice de permutation est sa transposée.}}$

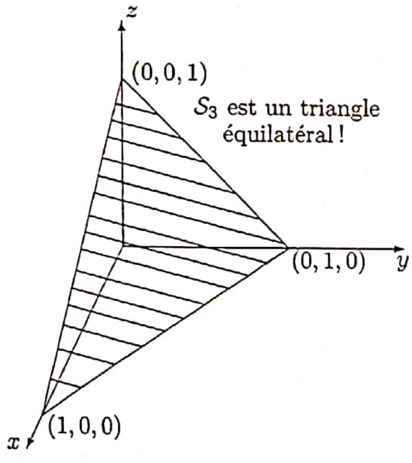
3°) Nous pouvons remarquer qu'une matrice A à coefficients positifs ou nuls est bistochastique si et seulement si elle vérifie $AU = U$ et ${}^tAU = U$, le vecteur U étant formé de composantes toutes égales à 1. Dès lors, si A et B sont bistochastiques, AB a bien des coefficients positifs ou nuls, et on a $(AB)U = A(BU) = AU = U$ et de même ${}^t(AB)U = {}^tB{}^tAU = {}^tBU = U$.

$\boxed{\text{Le produit de deux matrices bistochastiques est bistochastique.}}$

4°) Notons qu'on peut écrire $\|V\| = {}^tVV$ pour tout vecteur V de $\mathbb{R}^n$. Ici, les coefficients de A son tous entre 0 et 1, donc ils sont plus grands que leurs carrés ; donc $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Pour avoir égalité il faudrait que tous les coefficients vaillent 0 ou 1 dans la ligne i, donc que cette ligne soit un vecteur de la base canonique.

5°) Le produit de deux matrices A et B se calcule en fait par les divers produits scalaires des lignes de A par les colonnes de B. Le produit scalaire de deux vecteurs de norme au plus 1 ne dépasse par 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz), et ne vaut 1 que si les deux vecteurs sont égaux. Dans le cas de $AB = I_n$, on voit que la i-ième ligne de A doit être de norme 1 et coïncider avec la i-ième colonne de B. D'après la question précédente, il est clair que A est une matrice de permutation.

Partie II : Polyèdres convexes



1°) $\mathcal{S}_n$ est un polyèdre convexe à cause de sa définition par un nombre fini d'égalités et inégalités affines. Il est aussi borné car les λ_i ne peuvent dépasser 1. Enfin, il est de dimension $n-1$ car inclus dans l'hyperplan affine d'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et contenant les n points $(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ qui sont affinement indépendants.
Les sommets de $\mathcal{S}_n$ viennent d'être donnés. En effet, si λ a une composante $\lambda_k \in]0, 1[$, alors on peut écrire $\lambda_k = \lambda_k.1 + (1 - \lambda_k).0$ d'où en posant $S = 1 - \lambda_k$:

$$\lambda = (1 - \lambda_k)(\frac{\lambda_1}{S}, \ldots, \frac{\lambda_{k-1}}{S}, 0, \frac{\lambda_{k+1}}{S}, \ldots, \frac{\lambda_n}{S}) + \lambda_k(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

et λ n'est pas un sommet.
En fait, comme le montre la figure ci-contre, $\mathcal{S}_n$ est l'intérieur d'un simplexe régulier (à n sommets) de dimension $n-1$ plongé dans un espace de dimension n ; en effet, les sommets qu'on vient de donner sont tous à distances mutuelles 1 par rapport à la distance euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

2°) Le rôle du vecteur x dans la définition des hyperplans d'appui est anecdotique, de même que la structure euclidienne qui n'est pas nécessaire. Nous adopterons donc le point de vue des formes linéaires. Ainsi, H est caractérisé par une équation cartésienne de la forme $\varphi(y) = \alpha$, et c'est un hyperplan d'appui si et seulement si $\varphi(p) \leqslant \alpha$ pour tous les points p de K, avec égalité pour au moins un point (c'est plus clair ainsi).

- $H \cap K$ est un ensemble convexe, de dimension au plus égale à la dimension de K et à celle de H, soit encore $\dim(H \cap K) \leqslant \mathrm{Max}(\dim(K), n-1)$. C'est aussi une intersection d'un nombre fini de demi-espaces, car on peut considérer que H est ainsi obtenu : $H = \{x \mid \varphi(x) \geqslant \alpha\} \cap \{x \mid \varphi(x) \leqslant \alpha\}$. C'est une partie bornée car K l'est. En réalité, il s'agit d'un compact parce que les demi-espaces sont fermés, toute intersection d'une collection de fermés est un fermé et un fermé borné est compact en dimension finie ; mais ceci n'était pas demandé. Ainsi, $H \cap K$ est bien un polyèdre convexe.
- Un sommet de K situé dans H n'est, par définition, d'aucune manière barycentre de points distincts de H à coefficients strictement positifs. Il n'est donc pas non plus barycentre de points distincts de $H \cap K$ à coefficients strictement positifs, et c'est un sommet de $H \cap K$.

• Réciproquement, soit un sommet z de $H \cap K$. Montrons que c'est un sommet de K. Supposons que z soit barycentre de deux points u, v de K à coefficients strictement positifs, soit $z = \lambda u + (1-\lambda)v$. On a alors $\varphi(z) = \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v) \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$ (ceci utilise le fait que $\lambda \in]0,1[$). Cependant, comme z se trouve dans H, on a en réalité $\varphi(z) = \alpha$; dès lors, les inégalités ci-dessus sont toutes des égalités et on a $\varphi(u) = \varphi(v) = \alpha$, soit $u \in H, v \in H$. Comme on suppose que z est un sommet de $H \cap K$, il vient $u = v = z$, ce qu'il fallait. On peut exprimer ce résultat de manière imagée :

$$\boxed{\text{Les sommets d'un polyèdre convexe sont exactement les sommets de ses faces.}}$$

3°) Rappelons que la frontière d'une partie est la différence entre son adhérence et son intérieur. Ici, les demi-espaces étant fermés, un polyèdre convexe $K = \cap_{i=1}^m H_i^+ = \{x \in E \ / \ \forall i,\ \varphi_i(x) \leqslant \alpha_i\}$ est fermé et son intérieur est simplement l'intersection des intérieurs, soit $\overset{\circ}{K} = \{x \in E \ / \ \forall i,\ \varphi_i(x) < \alpha_i\}$, donc la frontière de K est constituée des points x tels que l'on ait $\varphi_i(x) \leqslant \alpha_i$ pour tout i, avec égalité pour au moins une valeur de i. On voit aussitôt que les points de la frontière se trouvent tous dans au moins un hyperplan d'appui de K.

4°) On a déjà que K contient sa frontière ; donc l'enveloppe convexe de K (K lui-même) contient l'enveloppe convexe de la frontière de K. Réciproquement, soit un point z de K. Une droite passant par z rencontre K suivant un convexe de celle-ci, donc suivant un segment (intervalle fermé et borné comme K) $[u, v]$. Le point u n'est sûrement pas dans l'intérieur de K puisqu'il a des voisins non situés dans K, il est donc dans la frontière. Il en est de même de v, et z est bien dans l'enveloppe convexe de la frontière de K.

5°) En dimension 1, un convexe fermé borné est un segment et tout point du segment est bien barycentre des extrémités. Supposons qu'en dimension $n-1$ tout polyèdre convexe soit l'enveloppe convexe de ses sommets. Considérons un polyèdre convexe K en dimension n. Tout point de K étant barycentre à coefficients positifs de points-frontière (c'est la question précédente), il suffit de montrer que les points-frontière sont des barycentres à coefficients positifs des sommets. Un tel point k se trouve dans un hyperplan d'appui H (question 3) ; dans cet hyperplan l'hypothèse de récurrence s'applique à $H \cap K$; ainsi, k est barycentre à coefficients positifs de sommets de $H \cap K$, qui sont aussi des sommets de K (question 2), ce qu'il fallait. En conclusion, on a montré que

$$\boxed{\text{Les polyèdres convexes sont enveloppes convexes de leurs sommets.}}$$

Ce résultat est faux pour des convexes compacts quelconques, parce que l'ensemble des sommets peut ne pas être fermé.

Partie III : Matrices bistochastiques

1°) La définition de $\mathcal{B}_n$ fait bien apparaître un nombre fini de formes linéaires dont les valeurs sont soit fixées soit positives ($\mathrm{coef}_{ij}(A) = a_{ij} \geqslant 0$, $L_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, $C_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$. C'est bien un ensemble borné parce que les coefficients sont tous compris entre 0 et 1. Enfin, les formes linéaires L_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et C_j $(1 \leqslant i < n)$ sont indépendantes car si $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j L_j = 0$ alors en opérant sur U_{kl} on a successivement $\lambda_k + \gamma_l = 0$, $\gamma_n = 0$, $\lambda_k = 0$, $\gamma_k = 0$. Les $2n-1$ formes donnent naissance à une application $A \mapsto (L_1(A), \ldots, L_n(A), C_1(A), \ldots, C_{n-1}(A))$ surjective, donc de rang $2n-1$, et de noyau de dimension $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geqslant \dim \mathcal{B}_n$. Cependant, $\mathcal{B}_n$ contient la matrice J dont tous les coefficients valent $\frac{1}{n}$, et sa direction est contient toutes les matrices de la forme $\lambda(A - J)$, A étant bistochastique. Soit une matrice B annulant toutes les formes linéaires L_i et C_j ; pour μ assez grand, tous les coefficients de μB sont inférieurs à $\frac{1}{n}$ en valeur absolue. Par conséquent, $\mu B + J$ est bien bistochastique. Ainsi, la direction de $\mathcal{B}_n$ est exactement l'intersection des noyaux des formes linéaires L_i et C_j.

2°) Déjà on constate que toute matrice de permutation est un sommet de $\mathcal{B}_n$ puisque les coefficients nuls ne peuvent être dans un segment $]u, v[$ avec $u \geqslant 0, v \geqslant 0$, et de même pour les coefficients égaux à 1.

Réciproquement, procédons par récurrence. En dimension 1 il n'y a rien à faire. Supposons que tout sommet de $\mathcal{B}_{n-1}$ soit une matrice de permutation, et soit un sommet A de $\mathcal{B}_n$. Si tous les coefficients de A sont inférieurs à 1, considérons a_{11} : dans la première ligne et la il doit y avoir au moins un autre coefficient non nul (pour pouvoir atteindre un total égal à 1). Soit donc $\theta(1) = 1, \varphi(1) = 1$ et $\varphi(2)$ tel que $0 < a_{\theta(1)\varphi(2)} < 1$. Dans cette colonne il doit exister au moins un coefficient $a_{\theta(2)\varphi(2)}$ non nul, donc compris entre 0 et 1 strictement. Dans la ligne $\theta(2)$ il va exister de même un coefficient $a_{\theta(2)\varphi(3)} \in]0,1[$ et ainsi de suite. Ce processus, dans l'ensemble fini des indices, va nécessairement revenir sur l'une des lignes et l'une des colonnes déjà vues (et on le fera dès que possible si on a le choix). Cela peut être néanmoins assez long, comme le prouve la matrice bistochastique $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Quitte à transposer la matrice, ce qui ne change aucunement le problème, nous pouvons supposer que l'on a $\varphi(p) = \varphi(q)$ avec $p < q$ et p, q minimaux, $\theta(p), \ldots, \theta(q-1)$ tous distincts, soit encore

$$a_{\theta(p)\varphi(p)} \in]0,1[, a_{\theta(p)\varphi(p+1)} \in]0,1[, \ldots a_{\theta(q-1)\varphi(q-1)} \in]0,1[, a_{\theta(q-1)\varphi(q)} \in]0,1[$$

(dans la colonne de numéro $\varphi(p) = \varphi(q)$ on a bien deux coefficients non nuls, dans les lignes $\theta(p)$ et $\theta(q-1)$). On a ainsi obtenu $q-p$ lignes et $q-p$ colonnes "bien disposées". On choisit alors $\varepsilon > 0$ assez petit, de sorte que l'on ait encore $a_{\theta(k)\varphi(k)} \pm \varepsilon \in]0,1[$ et $a_{\theta(k)\varphi(k+1)} \pm \varepsilon \in]0,1[$ pour tout $k \in \{p, \ldots, q-1\}$ - c'est possible puisque tous ces coefficients sont strictement compris entre 0 et 1. Soit alors la matrice $B(\varepsilon)$ obtenue en remplaçant dans A les coefficients $a_{\theta(k)\varphi(k)}$ par $a_{\theta(k)\varphi(k)} + \varepsilon$ et $a_{\theta(k)\varphi(k+1)}$ par $a_{\theta(k)\varphi(k+1)} - \varepsilon$ (toujours pour $k \in \{p, \ldots, q-1\}$). On a bien $B(\pm\varepsilon) \in \mathcal{B}_n$ et $A = \frac{1}{2}(B(\varepsilon) + B(-\varepsilon))$. Cette égalité contredit l'hypothèse (A est un sommet). Ainsi, il doit exister au moins un coefficient de A valant 1, ce qui oblige aussitôt sa ligne et sa colonne à être remplies de 0 ailleurs.

Comme la permutation des lignes et des colonnes d'une matrice bistochastique redonne une matrice bistochastique (cela revient à multiplier A à gauche et à droite par des matrices de permutation), et conserve la notion de sommet (il faut l'écrire), nous pouvons supposer que l'on a $a_{nn} = 1$. Dans ces conditions, la sous-matrice A' de A obtenue par les $n-1$ premières lignes et colonnes est encore bistochastique et sommet de $\mathcal{B}_{n-1}$. Par l'hypothèse de récurrence, A' est une matrice de permutation et A aussi, ce qui achève la preuve. En tenant compte des résultats de la partie précédente, on a montré que toute matrice bistochastique est une combinaison convexe de matrices de permutation.

3°) Cette question revient à un célèbre théorème, que nous formulerons dans un langage plus géométrique.

Théorème de Carathéodory. *L'enveloppe convexe d'une partie S de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls des parties de S ayant au plus $n+1$ éléments.*

Preuve : Supposons que $x = \sum_0^m \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ et $m > n$. Les vecteurs $(x_0 - x_1, \dots, x_0 - x_m)$ sont alors liés par une égalité du type $\sum_1^m \gamma_i (x_0 - x_i)$ avec au moins un γ_j non nul. Posons $\gamma_0 = -\sum_1^m \gamma_i$; on a alors $\sum_0^m \gamma_i x_i = 0$ avec $I = \{i | \gamma_i > 0\} \neq \emptyset$. Soit alors $t = \operatorname{Min}_{i \in I} \dfrac{\lambda_i}{\gamma_i}$. On a $\lambda_i - t\gamma_i \geqslant 0$ pour tout i (avec même un cas de nullité) et $\sum_0^m (\lambda_i - t\gamma_i) = 1$ d'où $x = \sum_{i=0}^m (\lambda_i - t\gamma_i) x_i$, relation du même type que la première avec (en dépit des apparences) au plus m coefficients strictement positifs. Par récurrence descendante, on est ainsi conduit à une expression mettant en jeu au plus $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

4°) Il ne reste plus qu'à combiner toutes les questions antérieures pour avoir le résultat.

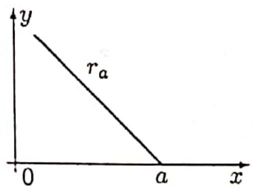
Partie IV : Orbite d'un vecteur

1°) Quitte à effectuer une permutation sur les composantes des vecteurs, nous pouvons supposer que l'on a $i = 1$ et $j = 2$.

Cherchons $A_\varepsilon^{1,2}$ sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & & & \\ 1-\alpha & \alpha & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, les coefficients non marqués étant obligatoirement nuls. On a dès lors on posant $z = A_\varepsilon^{i,j} x$: $z_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ et $z_2 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, d'où $z_1 - x_1 = (1-\alpha)(x_2 - x_1) \geqslant 0$ et $z_2 - x_2 = (1-\alpha)(x_1 - x_2) = -(z_1 - x_1)$. Donc on aura $z_i = y_i$ si et seulement si $(1-\alpha)(x_2 - x_1) = \varepsilon$, soit encore $1 - \alpha = \frac{\varepsilon}{x_2 - x_1} \in]0,1]$ de par les hypothèses posées, d'où $\alpha \in [0, 1[$.

2°) Si $y = Ax$, on a $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ d'où $\varphi(y_i) \leqslant \sum_j a_{ij} \varphi(x_j)$ par convexité de φ et du fait que $\sum_j a_{ij} = 1$. En sommant, il vient

$$\sum_i \varphi(y_i) \leqslant \sum_{i,j} a_{ij} \varphi(x_j) = \sum_j \Big(\sum_i a_{ij}\Big) \varphi(x_j) = \sum_j \varphi(x_j).$$



3°) On peut déjà appliquer l'hypothèse posée avec $\varphi = \mathrm{id}$ et $= -\mathrm{id}$; il vient aussitôt $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n x_j$. Pour aller au-delà il nous faut des fonctions convexes simples. La plus commode d'emploi est la fonction "rampe descendante", définie par $r_a(t) = \operatorname{Max}(a - t, 0) = \frac{a - t + |a-t|}{2}$ (cette dernière formulation prouvant la convexité à partir de celle de la valeur absolue) ; On a dès lors $\sum_{i/x_i < a} a - x_i \geqslant \sum_{i/y_i < a} a - y_i$.

Supposons d'abord que l'on ait $x_1 > y_1$, et choisissons $a = x_1$. Il vient $0 \geqslant \sum_{i/x_i > y_i} x_1 - y_i \geqslant x_1 - y_1$, ce qui est contradictoire.

Plus généralement, supposons montré que $\sum_{i=1}^k x_i \leqslant \sum_{i=1}^k y_i$, et que l'on ait $\sum_{i=1}^{k+1} x_i > \sum_{i=1}^{k+1} y_i$; cette inégalité impose $x_{k+1} > y_{k+1}$. Choisissons $a = x_{k+1}$. Il vient

$$\sum_{i=1}^k (x_{k+1} - x_i) \geqslant \sum_{i/y_i < x_{k+1}} (x_{k+1} - y_i) = x_{k+1} - y_{k+1} + \sum_{i=1}^k (x_{k+1} - y_i) + \sum_{\substack{i/y_i < x_{k+1} \\ i > k+1}} (x_{k+1} - y_i) \geqslant x_{k+1} - y_{k+1} + \sum_{i=1}^k (x_{k+1} - y_i)$$

soit encore $0 \leqslant -x_{k+1} + y_{k+1} \sum_{i=1}^k (y_i - x_i) = -\sum_{i=1}^{k+1} x_i + \sum_{i=1}^{k+1} y_i < 0$ ce qui est absurde ; donc on a l'inégalité au rang $k+1$.

4°) a) Pour $n = 1$ on a juste $A = (1)$ et $x_1 = y_1$. Si $x_1 = a$, le plus petit des nombres étant égal à la moyenne, ces nombres sont tous égaux. Ayant $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n x_j$, la moyenne des y_i est aussi égale à a. On a encore $y_1 \geqslant x_1 = a$, donc tous les y_i sont supérieurs ou égaux à a, et en fait ils valent a (moyenne). Dès lors, $A = I_n$ convient. Le même raisonnement fonctionne si $x_n = a$.

b) Supposons que $x_1 < a < x_n$ et $\sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{j=1}^{k} x_j$. On a aussi $\sum_{i=k+1}^{n} y_i = \sum_{j=k+1}^{n} x_j$. L'inégalité $\sum_{i=1}^{p} y_i \geqslant \sum_{j=1}^{p} x_j$, pour $p > k$, devient par soustraction de l'égalité figurant en hypothèse $\sum_{i=k+1}^{p} y_i \geqslant \sum_{j=k+1}^{p} x_j$. Ainsi, on a la possibilité l'appliquer la propriété (P) tant sur le k-uplet $x^{(k)} = (x_1, \ldots, x_k)$ que sur le $(n-k)$-uplet $x^{(n-k)} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. On en tire des matrices bistochastiques A_k et A_{n-k} telles que $y^{(k)} = A_k x^{(k)}$ et $y^{(n-k)} = A_{n-k} x^{(n-k)}$. Il en résulte $y = Ax$ avec $A = \begin{pmatrix} A_k & O \\ O & A_{n-k} \end{pmatrix}$, qui est bien bistochastique.

c) La définition des indices i et j n'est pas très claire. En fait, on a par hypothèse $x_i < a = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_{j-1} < x_j$, puisque les x_k sont rangés en ordre croissant. Eventuellement, on a $j = i+1$ et aucun x_k ne vaut a. Soit $\varepsilon > 0$ et $x' = A_\varepsilon^{i,j} x$. Seules les composantes d'indices i et j de x et x' diffèrent ; la domination de x' par y revient aux inégalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{i} x_k + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{i} y_k \,; \quad \sum_{k=1}^{i+1} x_k + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{i+1} y_k \,; \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^{j-1} x_k + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} y_k$$

puisque pour l'indice j les deux modifications se compensent et il n'y paraît plus. Par conséquent, l'ensemble des $\varepsilon > 0$ qui conviennent est $\left[0, \operatorname*{Min}_{i \leqslant h \leqslant j-1} \sum_{k=1}^{h} (y_k - x_k)\right]$. On note $\overline{\varepsilon}$ la borne supérieure de cet intervalle. Il est alors clair que l'on a $\sum_{k=1}^{h} x_k + \varepsilon = \sum_{k=1}^{h} y_k$ pour au moins une valeur de h comprise entre i et $j-1$. Il reste à se demander si le vecteur x' peut subir avec succès l'attaque de la question précédente. A cet effet, il suffit que ses composantes soient rangées en ordre croissant. Cela nécessite que $x'_i = x_i + \overline{\varepsilon} \leqslant a = x_{i+1} = \ldots \leqslant x'_j = x_j - \overline{\varepsilon}$. Cette condition équivaut à celle que l'énoncé propose, à savoir

(T)
$$\overline{\varepsilon} \leqslant \operatorname{Min}(a - x_i), (x_j - a)$$

Si tel est le cas, et toujours en supposant (P) démontrée pour les entiers inférieurs à n, il existe une matrice bistochastique A' telle que $y = A'x' = A'A_\varepsilon^{i,j} x$. Posons $A = A'A_\varepsilon^{i,j}$: il s'agit d'un produit de matrices bistochastiques, donc d'une matrice bistochastique, et on obtient bien la propriété (P) pour un tel vecteur x.

d) Dans le cas contraire, $\varepsilon = \overline{\varepsilon}$ est trop grand ; on va tenter d'en prendre un autre un peu plus petit. On peut poser $\varepsilon = \operatorname{Min}(a - x_i), (x_j - a)$; alors il reste vrai que $x' = A_\varepsilon^{i,j} x$ a ses composantes rangées en ordre croissant, et que y domine x'. On n'a plus d'égalité "intermédiaire". On remarque cependant que l'on a par exemple $\varepsilon = a - x_i$, donc que $x'_i = x_i + \varepsilon = a$, c'est-à-dire que le vecteur x' possède au moins une composante égale à la moyenne. Si l'on remplace x par x', on se retrouve dans une situation tout-à-fait analogue à ceci près que le nombre de composantes égales à a a strictement augmenté. Si le vecteur x' se met à vérifier le test (T), on aboutit et il vient $y = A''x' = Ax$. Sinon, on recommence, et on augmente ainsi incessamment le nombre de composantes égales à a dans x, tout en conservant les autres exigences (composantes bien rangées, domination par y, image de x par une matrice bistochastique). Ce processus va soit aboutir à la satisfaction du test (T), soit au vecteur de composantes toutes égales à a : on a traité cette situation en 4°a. En conclusion, y est toujours l'image de x par une matrice bistochastique, ce qu'il fallait.

5°) Orbite d'un vecteur..

Envisager l'orbite de x de $\mathbb{R}^n$ sous l'action des matrices bistochastiques, c'est faire agir celles-ci sur x et considérer l'ensemble des images obtenues.

- Soient x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On peut considérer des permutations σ de x et σ' de y qui amènent des vecteurs $x' = (x_{\sigma(i)})$ et $y' = (y_{\sigma'(i)})$, ayant leurs composantes rangées en ordre croissant. Les sommes des composantes ne changent pas, et notamment l'on a $\operatorname*{Min}_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i = \operatorname*{Min}_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x'_i$ et de même pour y. Cependant, pour un vecteur tel que x' la plus petite somme possible de k composantes est obtenue avec les k premières, soit $\operatorname*{Min}_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i=1}^{k} x'_i$. D'autre part, on a $x' = Px$, P étant une matrice de permutation, ainsi que $y' = P'y$. Si $y' = A'x'$ alors $y = P'^{-1}A'Px$ et $A = P'^{-1}A'P$ est une matrice bistochastique. Inversement, si $y = Ax$ alors y' est image de x par une matrice bistochastique. Ainsi, il suffit de poursuivre l'étude sur x' et y'.
- Supposons que $y' = Ax'$. La propriété $\sum_{i=1}^{n} x'_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i$ provient du fait que les colonnes de A ont pour somme 1. La propriété $\sum_{i=1}^{k} x'_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y'_i$ résulte de la combinaison des question 2 et 3 de cette partie.
- Supposons que y' domine x'. La question 4 montre que y' est image de x par une matrice bistochastique, d'où le résultat.